UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

CONSEJO SUPERIOR
DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

INSTITUTO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA

(Centro mixto C.S.I.C. - U.C.M.). MADRID

Publicación núm. 151

CARTOGRAFIA MATEMATICA

por

M. J. SEVILLA

PUBLICADO EN "TOPOGRAFÍA Y CARTOGRAFÍA"
Vol. II, facs. 6, págs. 11-22

MADRID
1986

CARTOGRAFIA MATEMATICA

Por: M. J. Sevilla
Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC)
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

Se presenta una visión conjunta de la Cartografía matemática con una síntesis de la teoría general de las proyecciones, las representaciones isométrica y geodésica y la teoría general de la representación conforme dando una metodología para su estudio. Se acompaña una extensa bibliografía actualizada.

1. INTRODUCCION

La cartografía es la ciencia que trata del establecimiento de las cartas de todo tipo. Engloba todas las fases de trabajo desde los primeros levantamientos hasta la impresión final de las cartas. Etimológicamente la palabra cartografía proviene del griego "graphein" (escribir o describir) y del latín "charta" (papel) si bien en algunas ocasiones se ha usado "topos" (lugar), del griego.

También se ha utilizado mucho la palabra geografía, de amplia aceptación desde Ptolomeo quien la definió como: "La geografía es la representación gráfica de la totalidad de las partes conocidas de la Tierra con todo lo que en ellas figura. Representa las posiciones y configuraciones únicamente por medio de líneas y símbolos. Esto nos permite, con el concurso de la matemática, concebir de un solo golpe de vista el conjunto de la Tierra en una imagen parecida a la que veríamos desde la bóveda celeste en su movimiento por encima de nuestras cabezas". Desde esta época las ciencias geográficas se han renovado y diversificado. La palabra cartografía comenzó a utilizarse en la segunda mitad del siglo XIX. Cebrián y Los Arcos, en su obra Proyecciones geográficas, de 1895, quizá el estudio sobre proyecciones más importante hecho en España en este tiempo, escriben siempre y juntas las dos palabras, corografía o cartografía, para referirse a esta ciencia.

La Asociación Cartográfica Internacional dio en 1966 la siguiente definición de cartografía, que fue adoptada por la UNESCO: "Conjunto de estudios y de operaciones científicas, artísticas y técnicas que, a partir de los resultados de observaciones directas o de la explotación de una documentación, intervienen en la elaboración de cartas, planos y otros medios de expresión, así como de su utilización".

En el proceso cartográfico se distinguen las siguientes fases: Concepción, constituida por el estudio teórico de leyes, principios y sistemas de representación; podría llamársele cartografía matemática. Producción, selección de datos, escala y materialización de sistemas de proyección, culminando con las técnicas de reproducción; está íntimamente ligada con la geodesia que le proporciona la red de apoyo y con la topografía y fotogrametría que le facilitan la obtención de datos sobre el terreno y que para algunos constituyen una parte de ésta. Utilización, forma de facilitar la comunicación de la información contenida en una carta y que conecta con todas aquellas ciencias que en algún momento han de servirse de representaciones de la superficie terrestre.

El dominio de la cartografía ha trascendido, en los últimos años del ámbito de la Tierra, pues ya se dispone de buenas cartas de la Luna y los planetas.

Si bien la cartografía puede considerarse como una ciencia por su origen, por sus medios y por sus fines, la cartografía práctica no deja de ser una técnica, al menos por sus medios, pues es bien sabido que el actual desarrollo de la cartografía está en función del de sus técnicas; pero es más, en el aspecto producción e incluso utilización también la cartografía tiene algo de arte, si bien sus premisas coartan ciertamente la imaginación.

Como el objeto inmediato de la cartografía es el establecimiento de cartas, debe definirse de una manera precisa el concepto de carta. La misma Asociación Cartográfica Internacional la define como: "Representación convencional, generalmente plana, en posiciones relativas de fenómenos concretos o abstractos localizables en el espacio". Una definición más completa la da el profesor Salichtchev, quien escribe: "Representación reducida, generalizada, matemáticamente precisa de la superficie terrestre sobre un plano, que muestra la situación, distribución y relaciones de los diversos fenómenos naturales y sociales, escogidos y definidos en función del objeto de cada carta. La carta permite igualmente mostrar las variaciones y los desarrollos de los fenómenos en el tiempo, así como sus factores de movimiento y de desplazamiento en el espacio".

Durante mucho tiempo la carta se ha utilizado casi exclusivamente para materializar itinerarios terrestres o marítimos, o posiciones de estrellas en el firmamento. La aparición de necesidades de todo tipo: científicas, militares, demográficas, etc., han adaptado y construido cartas especiales a su propia utilidad. Estos trabajos han permitido un desarrollo y una justificación crítica de los métodos utilizados y de la cartografía misma.

El contenido de una carta y su modo de representación son función del objeto asignado a la misma y de las necesidades que debe cubrir; así pues el dar una clasificación exhaustiva de las cartas es poco menos que imposible, sin embargo, podemos agruparlas según sus características fundamentales y clasificarlas, por su escala, por sus deformaciones, por la naturaleza de meridianos y paralelos, por su extensión, por su fin; o bien en honor a su principal promotor. A excepción de estas últimas y de las cartas temáticas, el resto van a venir ya definidas por el sistema de proyección utilizado y las propiedades que de él se deriven.

La representación plana de la superficie terrestre es de gran importancia en geodesia y topografía; el sistema de proyección adoptado puede facilitar el empleo de coordenadas rectangulares en los cálculos de triangulación y a ellos hay que tender. Fue Tissot el primero que dio normas sobre la elección de sistemas de proyección más convenientes para la ejecución de los trabajos topográficos y publicación de la carta a gran escala. En el capítulo II de su célebre Memoria escribe: "En la construcción de una carta a gran escala destinada a los servicios públicos, la condición más importante que cumplir es la relativa a la conservación de ángulos. No es necesario que el sistema de proyección los conserve rigurosamente; pero no debe alterarlos sino en cantidades suficientemente pequeñas para que cada hoja de la carta constituya un verdadero levantamiento topográfico". En el ya citado trabajo de Cebrián y Los Arcos, se dan normas muy concretas para la determinación del sistema de proyección que ellos creen más conveniente para el mapa de España.

Debe emprenderse, por consiguiente, el estudio de la cartografía por el de los diferentes tipos de proyecciones, fundamentalmente las conformes, equivalentes, atractozónicas, perigonales, perihálicas, perimecoicas, aphilácticas en sus diferentes clases; los desarrollos cilíndricos, mericilíndricos y epicilíndricos, los cónicos, mericónicos y epicónicos y también las proyecciones centrales y las policónicas. En todos ellos será fundamental el estudio de las fórmulas de la proyección, de las deformaciones tanto angulares, lineales como superficiales; los paralelos y meridianos de la carta también deben atenderse con cuidado, pues es con ellos con los que se construirá la red correspondiente y, en fin, deberán ponerse bien de manifiesto las principales propiedades y características de cada proyección y sus principales aplicaciones.

Mención aparte debe hacerse de las proyecciones isométricas y geodésicas acompañándolas de los correspondientes desarrollos matemáticos que las gobiernan.

Hemos dejado para el final la teoría general de la representación conforme que es sin duda el sistema de proyección más generalmente empleado y que por lo tanto debe estudiarse en profundidad. Dentro de esta teoría se incluirán las proyecciones más en uso, esto es la Mercator, Lambert, estereográfica y UTM.

Actualmente el estudio de la cartografía presenta tres vertientes bien diferenciadas, la cartografía matemática, la cartografía automática y las técnicas de reproducción, siendo estas últimas las que están en pleno desarrollo con el concurso de ordenadores y la gran cantidad de equipos automáticos que continuamente aparecen. No obstante, un buen conocimiento de la cartografía matemática es necesario para poder sentar claramente el proceso cartográfico en su verdadera dimensión y para poder efectuar las aplicaciones geodésicas y topográficas a que da lugar.

2. TEORIA GENERAL DE LAS PROYECCIONES

En esencia la cartografía matemática se va a ocupar del establecimiento de las relaciones entre el espacio origen, elipsoide o esfera, y el plano, bajo las condiciones que en cada caso se impongan, y en el estudio de las deformaciones que se produzcan. Este problema entra de lleno dentro de las teorías de la representación y es la ley de la deformación de Tissot la que nos hace ver que "Toda representación de una superficie sobre otra puede sustituirse en el entorno de cada punto, por una proyección ortogonal hecha a una escala conveniente", de donde, un círculo infinitesimal trazado sobre una superficie se transforma en una elipse que se denomina elipse indicatriz de Tissot. Además el teorema de Tissot: "En cada punto regular de la superficie origen hay dos curvas con tangentes perpendiculares entre sí, y sólo dos si los ángulos no se conservan, tales que sus representaciones sobre la carta son también ortogonales, de manera que tanto sobre la superficie como sobre el plano existe un sistema de trayectorias ortogonales y si la representación no conserva los ángulos existe uno solo cuyas proyecciones sobre la otra superficie son también ortogonales". En estas condiciones puede emprenderse fácilmente el estudio de los semiejes de la elipse indicatriz, de las alteraciones de ángulos, de longitudes y de superficies.

Antes de entrar en el estudio particularizado de los diferentes sistemas de proyección es conveniente establecer algunas condiciones generales de las proyecciones conformes y de las equivalentes.

Definiendo las proyecciones conformes como aquéllas que conservan los ángulos de elementos homólogos, se llega inmediatamente a que una primera condición de conformidad es que la elipse indicatriz de Tissot sea un círculo, los semiejes a y b serán iguales, a = b, y esto nos lleva a la condición analítica,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \Phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \Phi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda},$$

siendo $x = x(\Phi, \lambda)$, $y = y(\Phi, \lambda)$ las ecuaciones de la proyección y ρ, r los radios de curvatura del meridiano y paralelo respectivamente. Introduciendo la latitud creciente $\pounds$ definida de la forma

$$\pounds = \int_0^{\Phi} \frac{\rho}{r}\, d\Phi ,$$

estas condiciones quedan independientes de meridianos y paralelos, esto es,

$$\frac{\partial y}{\partial \pounds} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \pounds} = -\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

Ahora bien, estas relaciones no son otras que las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que son las que debe satisfacer la función de variable compleja

$$z = x + i\ y = f(\pounds + i\lambda)$$

para que sea analítica en el punto z, previniendo que existan y sean continuas las derivadas parciales. Por consiguiente podemos decir que: "Toda función analítica y regular representa una transformación conforme". Observando que, en este caso, las componentes x e y son funciones armónicas, las ecuaciones generales de las proyecciones conformes serán de la forma:

$$y = f(\pounds + i\lambda) + f_1(\pounds - i\lambda),$$
$$ix = f(\pounds + i\lambda) - f_1(\pounds - i\lambda),$$

y como x e y han de ser reales, si f es real f_1 ha de ser la misma función y si f es imaginaria f_1 será su conjugada. La determinación práctica de proyecciones conformes consiste en determinar f y f_1 imponiendo condiciones a los elementos que se correspondan en la transformación.

Así por ejemplo, la condición de que uno de los meridianos de la carta sea rectilíneo se traduce por $y = 2f(\pounds)$, si a esto se le añade que la ordenada del punto intersección del meridiano con el paralelo de latitud ϕ sea constantemente igual a $\pounds$ se obtiene inmediatamente

$$y = \pounds \,, \qquad x = \lambda$$

que son las fórmulas de la proyección de Mercator que se estudiará detenidamente en su momento. De esta forma pueden determinarse infinidad de proyecciones conformes.

Se definen las proyecciones equivalentes como aquéllas que conservan las áreas de las figuras representadas. Esto nos lleva a la condición de equivalencia

$$\frac{1}{\rho r}\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) = 1 \;;$$

y si definimos una nueva variable por

$$\pounds = \int_0^{\phi} \rho \; r \; d\phi \,,$$

la condición queda independiente de meridianos y paralelos, es decir

$$\frac{\partial y}{\partial \pounds}\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \pounds}\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 1.$$

En este caso es fácil ver que las ecuaciones generales de las proyecciones equivalentes son:

$$x = g(\pounds,\lambda) \,,$$
$$y = f(x) + \int d\pounds \Big/ \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_{\pounds,\, x} ,$$

siendo g y f funciones arbitrarias de x que deben ser consideradas como constantes en la expresión de $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$.

Con estas ligeras consideraciones generales sobre proyecciones conformes y equivalentes, ya puede pasarse al estudio pormenorizado de los principales sistemas de representación. Vamos a dar algunas ideas al respecto.

Proyecciones perspectivas, son aquéllas que se obtienen proyectando la superficie origen, que supondremos esférica, sobre un plano generalmente tangente a la misma desde un punto situado en la perpendicular a dicho plano trazada por el centro de la esfera. Si llamamos D a la distancia del centro de la esfera, que supondremos de radio unidad, al punto de vista, su magnitud nos va a determinar el sistema perspectivo. Así mismo la colatitud θ_0 del centro de proyección nos va a clasificar el sistema.

El caso más general que puede presentarse es cuando D > 1 y θ_0 cualquiera, así se obtendrá la perspectiva general escenográfica oblicua. En esta proyección, tanto los paralelos como los meridianos de la carta son elipses. Al ser D variable y mayor que 1, existirán infinitas proyecciones escenográficas oblicuas entre las que destacaremos las perimecoicas que hacen mínima la deformación lineal, para un hemisferio resulta D = 1.6180. Muy interesante también es la perspectiva de La Hire en la que la transformada del arco de meridiano de 45° de amplitud, contado a partir del polo, es igual a la transformada del mismo arco e igual amplitud, a partir del ecuador. Para D = 2.148 se obtiene una perspectiva perihálica que hace mínima la deformación superficial para un hemisferio. En el caso en que θ_0 = 0 se obtiene la escenográfica polar donde los meridianos son rectas concurrentes y los paralelos son círculos. Si se hace θ_0 = 90° resulta la escenográfica meridiana que es simétrica respecto a los ejes coordenados.

El origen de la proyección escenográfica se remonta a 1701 en que La Hire la utilizó para representar planisferios celestes sobre el plano de la eclíptica, posteriormente Parent (1704) le hizo algunas modificaciones. Un siglo después vuelve a ponerse de actualidad con los trabajos de Lowry (1824) y sir Henry Hames (1857), coronel del ejército inglés, la utilizó para representar las dos terceras partes del globo y que A.R. Clarke la extendió hasta los 113°.5 con un valor de D distinto. Estas proyecciones fueron también estudiadas por Tissot en la búsqueda de mínimas deformaciones.

En el caso $D = \infty$ resultan las proyecciones perspectivas ortográficas de las cuales, para θ_0 cualquiera resultan las horizontales por ser el plano de la proyección el del horizonte del lugar, tanto los meridianos como los paralelos son elipses. Para $\theta_0 = 0$ se denominan ecuatoriales cuyos meridianos son rectas y paralelos circunferencias que conservan su verdadera magnitud. Si $\theta_0 = 90°$ obtendremos las ortográficas meridianas en las que los paralelos son rectas paralelas al eje x y los meridianos elipses cuyo semieje mayor es 1 y cuyo eje menor coincide con el eje x.

La invención de los sistemas ortográficos se atribuye a Apolonio de Pérgamo y a Hiparco de Nicea (150 a.C.). En la antigüedad se usó con el nombre de "Analema" y Ptolomeo escribió sobre ella un tratado del que Delambre en su Historia de la Astronomía Antigua hace un estudio crítico. Ptolomeo empleaba esta proyección para calcular la posición del Sol. El español Rojas utilizó la proyección ortográfica en la construcción de astrolabios y de ahí el nombre de Astrolabio de Rojas con que se ha conocido esta proyección. Fournier y Varem la propusieron para la construcción de mapamundis y La Guillermine en 1843 publicó un atlas ortográfico. También fue usada por Garnier (1862) y Thoulet dio las reglas para el trazado del enrejado de meridianos y paralelos. Se emplea para cartas de la Luna o de un astro visto por un observador terrestre.

En el caso $D = 0$ resultan las proyecciones perspectivas gnomónicas, en las que el punto de vista es el centro de la esfera; en las oblicuas, con θ_0 cualquiera, los meridianos son rectas y los paralelos cónicas. Las directas, con $\theta_0 = 0$, producen meridianos rectilíneos que forman con el primer meridiano ángulos iguales a sus longitudes, los paralelos son círculos concéntricos. En las transversas, con $\theta_0 = 90°$, los meridianos también son rectas y los paralelos hipérbolas.

Las principales aplicaciones de las proyecciones gnomónicas se han dado en la construcción de cartas celestes, pues son ventajosas para representar las constelaciones. También se emplean en geología y en navegación marítima y aérea. El origen de esta proyección quizá sea anterior a Thales de Mileto (548 a.C.), quien la utilizó en la predicción de eclipses de Sol. Se empleó en la construcción de relojes de Sol, fue bautizada con el nombre de Horóscopo aunque más tarde tomó el de gnomónica debido al indicador de la hora de los relojes solares. Muchos han sido los autores que han estudiado y utilizado esta proyección, destaquemos por ejemplo a Lambert, Mayer, Germain, Prony, etc. En la actualidad es utilizada en astrometría como base para el cálculo de las coordenadas estándar para la aplicación, por ejemplo, del método de Turner.

De las proyecciones perspectivas, la más importante es aquélla en que D = 1, es decir la proyección estereográfica, su importancia le viene del hecho de ser la única perspectiva conforme; el punto de vista es el diametralmente opuesto al de tangencia. En las oblicuas los meridianos son circunferencias y los paralelos también. En las directas, que son las más empleadas, los meridianos son rectas concurrentes en el polo y los paralelos circunferencias concéntricas. En las transversas los meridianos son círculos que pasan por los polos y los paralelos círculos con centros alineados en el eje y.

La proyección estereográfica fue utilizada por Hiparco de Nicea para representar la esfera celeste dándole el nombre de Planisferio, aunque su invención se atribuye a Ptolomeo. Fue modificada, pasando a oblicuas, por el árabe Abuizac de Azarquiel, de Córdoba, que vivió en Toledo en el siglo XI, cuando era conocida como Astrolabio de Gemma. Su primera aplicación a la construcción de mapas data de 1514 en la representación de Werner. En 1544 volvió a utilizarla, en su forma meridiana, Fineo y fue Mercator quien extendió esta proyección en su atlas. El nombre de estereográfica se debe al jesuita D'Aguillon (1613). Su uso continúa vigente en la actualidad y a ella nos referiremos en otro momento.

Proyecciones centrales son proyecciones que tienen un carácter local, los círculos verticales se representan por un haz de rectas conservándose los ángulos acimutales, los almicantarados se representan por circunferencias concéntricas completas.

A causa de la conservación de los ángulos antes indicada, se denominan a veces acimutales y también cenitales. En realidad este grupo de proyecciones cabe considerarlas en el de los sistemas perspectivos. Entre las más interesantes pueden destacarse las centrales conformes y las equivalentes; dentro de estas últimas se encuentran: la proyección central oblicua equivalente de Lambert, la polar equivalente de Lorgna, que es una perspectiva con D = 3, las proyecciones anulares en las que el polo se representa por un círculo de radio finito en vez de un punto, la meridiana equivalente de Lambert en la que los meridianos cortan perpendicularmente al ecuador y los paralelos son ortogonales al meridiano central y al que limita el hemisferio, ésta última puede extenderse a la totalidad del globo mediante el conocido artificio de Hammer-Aitoff dando lugar a la proyección que lleva su nombre, transformando la proyección de Lorgna por este artificio se obtiene la proyección de Briesmeister.

Otro grupo importante de proyecciones centrales lo constituyen las proyecciones centrales aphilácticas de G. Postel, también llamadas cenitales equidistantes que cabe considerarlas como perspectivas con D variable, en ellas las distancias esféricas de los almicantaradas a lo largo de los verticales se conservan en la carta, son líneas automecoicas. Completan el sistema de proyecciones centrales la intermedia de Breusing y la central compensadora aphiláctica de Airy. Las principales aplicaciones de las proyecciones centrales ha sido en la construcción de mapamundis y para la confección de cartas de eclipses de Sol.

Proyecciones cónicas son aquéllas obtenidas por proyección sobre un cono tangente o secante cuyo eje coincide con un diámetro del globo; casi sólo se usan las directas en las que los meridianos se transforman en rectas concurrentes en un punto, y los paralelos en arcos de circunferencias concéntricas en aquel punto. En las proyecciones cónicas propiamente dichas el ángulo entre dos meridianos rectilíneos de la carta no es igual al correspondiente del globo, su relación, n, se denomina constante del cono. Según sea n resultan distintos grupos de proyecciones cónicas. Si $n = 1$ la proyección de un casquete esférico estaría representada por un círculo completo (proyección estereográfica ecuatorial). Si $n > 1$ habría superposición en la representación de una zona esférica. Si $n < 1$ resulta el desarrollo cónico tradicional, variando $n < 1$ resultan los diversos casos que corresponderán a diversas posiciones del cono que generalmente se supone tangente o secante al globo. La cónica central es la única perspectiva desde el centro de la Tierra, pero no suele usarse.

Debido a las grandes deformaciones que en general se producen en las zonas alejadas de los paralelos automecoicos, estos sistemas no se recomiendan para la representación de la Tierra en su totalidad. Sin embargo, si la zona a representar es pequeña, la proyección cónica es recomendable, aunque se deberá tener en cuenta la forma elipsoidal de la Tierra. La orientación del eje del cono dará lugar a las proyecciones cónicas directas, transversas y oblicuas. Estas proyecciones quedarán determinadas en cuanto se conozca n y el radio del paralelo de la carta.

La gran cantidad de proyecciones cónicas existentes no nos permite hacer un estudio pormenorizado, citaremos sólo las más importantes. Dentro de las proyecciones cónicas equivalentes tenemos las de Lambert, las perigonales, la troncocónica equivalente de Albers con dos paralelos automecoicos, en cuyo sistema se construyó el mapa del mundo a escala 1/10.000.000 sobre el elipsoide de Clark, las de P. Murdoch la primera de las cuales, que es troncocónica, conserva distancias entre paralelos siendo la segunda gnomónica epicónica pero equivalente. Entre las epicónicas que se obtienen por proyección perspectiva destacan la de Braun y la segunda de Murdoch. Entre las conformes destaquemos la cónica conforme de Lambert, una de las proyecciones más importantes a lo largo de la historia de la cartografía y de la que nos ocuparemos detenidamente después, no obstante digamos que en ella estaba la proyección militar reglamentaria en España.

Proyecciones mericónicas son aquéllas en las que los paralelos, automecoicos o no, son siempre arcos de circunferencias concéntricas pero los meridianos no son rectilíneos como antes, sino curvas trascendentes concurrentes en un punto; en estas condiciones no existen proyecciones mericónicas conformes. Entre las mericónicas equivalentes merece destacarse la proyección de Bonne que tiene paralelos circulares concéntricos automecoicos y meridianos hiperbólicos, y que ha sido la base del Mapa Militar Itinerario de España en escala 1/ /200.000. Este mapa comienza a formarse en 1882 como ampliación del anterior 1/500.000 en proyección modificada de Flamsteed. Sólo presenta planimetría hasta 1929 en que se incluyen curvas de nivel. En 1951 se unifica con el MTN. El 1/200.000 tiene como ejes el meridiano de Madrid y su perpendicular trazada por el punto de latitud 40° elegido como paralelo medio. La red de meridianos y paralelos es de 30' en 30' desde 34° 30' a 44° 30' en latitud y de +6° a -8° en longitud, abarca por tanto la península Ibérica, Baleares y Norte de Africa formando un rectángulo compuesto de 110 hojas rectangulares de 63 x 46 cm. Un caso particular de la proyección de Bonne es la proyección de Werner (1514) en la que el paralelo medio se reduce a un punto y presenta un contorno muy característico.

Proyecciones cilíndricas son las obtenidas por proyección sobre un cilindro tangente o secante a la esfera cuyo eje coincida con un diámetro del globo. El desarrollo de la superficie cilíndrica proporciona la red de la proyección. Si el eje del cilindro coincide con la línea de los polos la proyección es directa, entonces los meridianos de la superficie están representados por rectas paralelas separadas entre sí por distancias proporcionales a sus diferencias de longitudes y los paralelos por otras rectas perpendiculares a las anteriores. Las posiciones de los diferentes puntos de la carta se refieren al sistema de ejes formado por la proyección del primer meridiano como eje de las y y la del ecuador como eje de las x. Entonces y será función de la latitud y x de la longitud. La única proyección cilíndrica directa conforme que existe es la muy importante proyección de Mercator (1569) que trataremos en su momento. También tienen importancia las equivalentes y las perigonales. Entre las aphilácticas merece destacarse la proyección plana cuadrada con ecuador y meridianos automecoicos. Entre las equivalentes sobresale la cilíndrica equivalente de Lambert, que es una proyección sobre el cilindro según sus normales. La proyección central cilíndrica es una proyección perspectiva desde el centro de la esfera, ni es conforme ni equivalente, al igual que la secante de Gall.

Cuando el eje del cilindro está en el plano del ecuador, entonces tanto él como las generatrices son perpendiculares a la línea de los polos, teniéndose entonces las proyecciones cilíndricas transversas. En este caso los meridianos y paralelos de la carta son curvas trascendentes. Como proyecciones características de este tipo citaremos: La proyección de Gauss, que dio lugar a la hoy mundialmente utilizada proyección UTM y que se estudiará más tarde; la cilíndrica conforme transversa de Lambert, recomendada para países que se extiendan a lo largo de un meridiano; la proyección equidistante transversa de Cassini cuyos meridianos son automecoicos y fue utilizada en la construcción del mapa topográfico de Francia de 1800 hojas a escala 1/86.400 que fue comenzado en 1750 y concluido en 1815.

Entre las proyecciones cilíndricas oblicuas destaca la proyección de Kahn utilizada para la construcción de cartas itinerarias en navegación ortodrómica aérea, es conforme y muy útil hasta 15° del círculo máximo de tangencia.

Otras proyecciones interesantes son las perspectivas epicilíndricas con punto de vista fijo y móvil; éstas son perspectivas de los diferentes puntos de la superficie sobre un cilindro de revolución alrededor de la línea de los polos, en el primer caso el punto de vista fijo se haya sobre esta línea, si coincide con el centro de la Tierra se obtiene el desarrollo gnomónico epicilíndrico, en el segundo describe una circunferencia concéntrica con el ecuador estando situado a ciento ochenta grados del punto que se desea representar, ejemplo es la proyección de Braun (1868).

Las proyecciones mericilíndricas son aquéllas en las que los paralelos del globo están representados en la carta por rectas paralelas; los meridianos de la proyección pueden ser líneas cualesquiera. Si los meridianos son rectas concurrentes en un punto la proyección se llama trapeciforme. Dentro de las mericilíndricas destacan: la equivalente con meridianos automecoïcos; la de Collignon de contorno cuadrado y paralelos rectilíneos; la equivalente de Babinet o proyección de Mollweide, de contorno circular, meridianos semielípticos y paralelos rectilíneos con la particularidad de que en su centro de proyección la alteración angular no es nula, la proyección de Bartholomew es su aspecto oblicuo; las proyecciones interrumpidas de Goode, que disminuyen las deformaciones de la de Molweide para zonas alejadas del meridiano central, son muy empleadas por su vistosidad sobre todo la que agrupa continentes; la proyección de Flamsteed o sinusoidal de Nicolás Sanson es equivalente con paralelos rectilíneos equidistantes; la proyección estereográfica equivalente de Prepetit Foucault. Entre las mericilíndricas aphilácticas destacan la de Pedro Apiano (1524) con primer meridiano y ecuador automecoicos, la de Loritz (1527), la ortográfica meridiana, la segunda de Fournier con meridianos elípticos propuesta en 1646 y la proyección de Arago, utilizada en su Astronomía Popular. No existen proyecciones mericilíndricas conformes.

Existen otros modos de representación que no son, propiamente hablando, sistemas geométricos de proyección; tal es el caso de las proyecciones poliédricas, policéntricas y naturales. Aquí se circunscribe el elipsoide con un poliedro compuesto por numerosas caras que son planos tangentes, cada una de las cuales se trata aisladamente, tomando su punto de tangencia como centro de proyección. Se divide la superficie en zonas comprendidas entre dos meridianos y dos paralelos próximos que quedan representadas por trapecios rectilíneos isósceles. En las policéntricas la proyección utilizada es la gnomónica. El nombre de naturales proviene del hecho de que la porción de superficie que encierra cada trapecio puede considerarse como plana y se comporta como una carta topográfica, sea cual sea el sistema de proyección elegido.

La importancia de estas proyecciones naturales es que éste fue el sistema elegido en 1870 para la formación del Mapa Topográfico Nacional 1/ /50.000. Está dividido en hojas de 20' de base en el sentido de los paralelos y 10' de altura en el de los meridianos. Consta de 1.130 hojas de las que 1.078 corresponden a la Península y Baleares y 52 a las islas Canarias. Los parámetros del elipsoide adoptado entonces son los de Struve de semieje mayor a = 6378298,3 m. y excentricidad e^2 = = 0.00677436. Las ediciones modernas utilizan el elipsoide internacional y la proyección UTM.

Proyecciones policónicas son aquéllas en que la superficie de proyección está formada por varias cónicas tangentes o secantes a lo largo de los paralelos. Los paralelos de la carta son arcos de circunferencia que tienen sus centros en línea recta, los meridianos son curvas trascendentes. Policónicas rectangulares son aquellas proyecciones policónicas que conservan la perpendicularidad entre los meridianos y los paralelos, entre éstas merece destacarse la proyección policónica rectangular del Coast and Geodetic Survey de los Estados Unidos (US.C. and GS) que se emplea en mapas de pequeña escala y en la que el ecuador y primer meridiano se representan por rectas perpendiculares entre sí y sobre ellas se conservan las verdaderas magnitudes de los respectivos arcos rectificados. Otra policónica importante es la policónica ordinaria del US.S. and G.S. que no es rectangular sino aphiláctica, los paralelos son automecoicos; en esta proyección se encuentra el Mapa Militar Especial Progresivo de los Estados Unidos. En proyección policónica ordinaria modificada, reemplazando meridianos curvilíneos por las respectivas cuerdas y aproximando los paralelos entre sí para que los ± 2º del central sean automecoicos, se encuentra la Carta Internacional del Mundo 1/1.000.000 (1909); el globo terrestre se divide en 60 husos iguales y cada huso en 44 trapecios curvilíneos y dos triángulos esféricos, resultan así 2.760 hojas. A partir de las correspondientes hojas de la CIM, se realizó en 1943-49 el Mapa del Sahara Español 1/500.000; cada hoja de la CIM da lugar a 4 del Sahara cada una de las cuales abarca 2° en latitud y 3° en longitud, en total resultan 20 hojas, está construido con los parámetros del elipsoide internacional.

Citemos por último entre las policónicas aphilácticas la primera proyección de Fournier que tiene meridianos elípticos con eje mayor común la línea que une las proyecciones de los polos que son puntos singulares, los paralelos son arcos de circunferencia. Señalemos también la existencia de proyecciones policónicas conformes y equivalentes, y la existencia de sistemas híbridos como las proyecciones de Winkel, Eckert, Raisz, las interrumpidas de Gode y Cahill, etc.

Existen otros muchos tipos de proyecciones de las que por su cantidad y escaso interés cartográfico, nada diremos. Son éstas las esféricas o globulares, meriesféricas, estrelladas, de Schmict, de Litrow, de Cuyon, de Pierce, de Adams, de Laborde, etc., etc.

3. REPRESENTACION ISOMETRICA

La representación de una superficie $P(u,v)$ en otra $P_1(u_1,v_1)$, establecida por las expresiones $u_1 = u_1(u,v)$, $v_1 = v_1(u,v)$, se dice que es isométrica cuando deja invariantes los ángulos y las distancias. Así pues, las primeras formas diferenciales $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ y $ds_1^2 = E_1du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2$, correspondientes a puntos homólogos, coinciden y esto nos permite establecer las condiciones de isometría:

$$E = E_1, \qquad F = F_1, \qquad G = G_1$$

En toda isometría se conserva la curvatura de Gauss K, como se comprueba sin más que tener en cuenta el teorema egregium de Gauss. El recíproco no es cierto.

Estudiaremos la representación isométrica sólo en aquellos aspectos que estén relacionados con las representaciones cartográficas, por lo que no se tratarán los clásicos problemas de Minding y Bour sobre la determinación de isometrías. La teoría se desarrollará en coordenadas geodésicas paramétricas lo que nos permite afirmar que la primera forma fundamental ds^2 de una superficie en coordenadas geodésicas siempre puede reducirse a $ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$ de forma que se verifique, bien $\sqrt{G(0,v)} = 1$ y $[\frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G(u,v)}]_{u=0} = 0$, o bien $\sqrt{G(0,v)} = 0$ y $[\frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G(u,v)}]_{u=0} = 1$, según el sistema de coordenadas geodésicas elegido. Además, la curvatura de Gauss adopta entonces la forma

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = \frac{G_u^2 - 2GG_{uu}}{4G^2},$$

con la cual se demuestra fácilmente un importante teorema de Minding: "Todas las superficies de igual curvatura constante son isométricas". En particular, para $K = 0$ resulta que todas las superficies desarrollables pueden ser representadas isométricamente sobre un plano; y esto nos garantiza perfectamente la utilización en cartografía de los desarrollos cónicos y cilíndricos. También se concluye que toda superficie de curvatura constante positiva K puede representarse isométricamente sobre una esfera de radio $1/\sqrt{K}$. Por último, las superficies de curvatura K negativa también pueden representarse isométricamente unas sobre otras, aunque este caso ya no tiene interés para nosotros.

4. REPRESENTACION GEODESICA

Una representación se dice que es geodésica cuando conserva las líneas geodésicas, por tanto, toda representación isométrica es también geodésica, el recíproco no es cierto. Evidentemente dos superficies arbitrarias no se pueden representar geodésicamente, y habrá que investigar aquéllas que tengan interés en cartografía; esto nos lo resuelve perfectamente el siguiente teorema de Beltrami: "Las únicas superficies que pueden representarse geodésicamente sobre el plano son las de curvatura constante". La demostración clásica de este teorema es un verdadero ejercicio de manejo de las ecuaciones de Gauss, de Weingarten y de

Mainardi-Codazzi, lo que nos indica claramente que un estudio profundo de la cartografía matemática debe hacerse sobre una base sólida de geometría diferencial de superficies.

La representación geodésica de superficies arbitrarias ha sido motivo de estudio de diversos autores, entre los que podemos destacar a Liouville, Dini y Lie, cuyas obras se consultan con provecho.

5. TEORIA GENERAL DE LA REPRESENTACION CONFORME

Definiendo la representación **conforme** como aquélla que conserva los ángulos, la teoría general de la representación conforme nos va a caracterizar, mediante una serie de teoremas, las diferentes condiciones a la vista de las cuales podremos decir que estamos ante una tal proyección y, recíprocamente, las condiciones que debemos imponer para establecerla. El estudio de la representación conforme es de una importancia fundamental en cartografía, pues hoy día es en este sistema en el que se construyen prácticamente todas las cartas, una vez que se han comprobado sus grandes ventajas para los trabajos geodésicos y topográficos globales.

A manera de resumen citaremos los teoremas más interesantes al respecto:

Teorema 1. Es condición necesaria y suficiente para que una representación sea conforme, que exista proporcionalidad entre los elementos de arco ds y ds_1 correspondientes a puntos homólogos. Esto es, que los coeficientes de las respectivas primeras formas fundamentales de las superficies sean proporcionales. Se escribe

$$ds_1 = k\, ds, \text{ de donde, } k = \frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G},$$

al coeficiente k se le llama escala local o módulo lineal.

Teorema 2. Es condición necesaria y suficiente para que una representación sea conforme que exista semejanza en lo infinitesimal.

Teorema 3. Es condición necesaria y suficiente para que una representación sea conforme que se correspondan las familias de curvas isótropas. Las curvas isótropas nos permiten definir los sistemas isométricos como aquellos (u,v) para los que $ds^2 = h(u,v)(du^2 + dv^2)$. Se demuestra que en toda superficie puede definirse una infinidad de sistemas isométricos y se concluye con el siguiente

Teorema 4. Dos superficies admiten una representación conforme siempre que a un sistema isométrico de una de ellas le corresponda un sistema isométrico de la otra. Además

Teorema 5. Si (u,v) es un sistema isométrico, cualquier otro sistema isométrico (α,β) queda definido por $\alpha + i\beta = f(u + iv)$ siendo f una función analítica arbitraria de variable compleja. Por consiguiente mediante sistemas isométricos podemos representar conformemente una superficie sobre otra de infinitas maneras.

La teoría de funciones de variable compleja permite establecer las condiciones que deben cumplir las regiones de las superficies entre las que se puedan establecer representaciones conformes. En especial es el teorema de Riemann el que indica: Toda región simplemente conexa en el plano, que no sea el plano mismo, puede representarse conformemente sobre el disco abierto unidad mediante una aplicación biyectiva.

Esta forma de introducir la teoría general de la representación conforme en esencia se debe a Gauss cuya memoria al respecto apareció en 1822. Una buena base de geometría diferencial y análisis de variable compleja posibilitarán su aplicación.

Establecidos los criterios de conformidad, el primer paso será la obtención de las fórmulas de la representación, es decir de la ley matemática de la correspondencia. Después habrá que estudiar las propiedades métricas de los elementos transformados y en especial lo referente a las transformadas de las líneas geodésicas de la primera superficie, que en general no serán geodésicas de la segunda sino que formarán con ellas unos ciertos ángulos que será preciso conocer. Igualmente habrá que conocer la diferencia entre la longitud, entre dos puntos, de la línea transformada y la de la geodésica que pase por ellos. Estos problemas pueden plantearse en términos de las curvaturas geodésicas de las curvas transformadas, lo que, por consiguiente, habrá que analizar cuidadosamente.

En estas condiciones pasamos al estudio de la representación conforme del elipsoide sobre el plano que, en sus diferentes sistemas, tiene en cartografía un interés especial. La primera representación conforme mencionada en la historia es la proyección estereográfica, llamada a veces de Ptolomeo (150 d.C.), aunque pudo ser conocida por Hiparco (150 a.C.); su utilización era puramente astronómica, principalmente para la construcción de astrolabios, que en la edad media sirvieron a navegantes y astrónomos. El matemático flamenco Gemma Frisius (1540) empleó la proyección estereográfica en la construcción de mapas aunque parece que el nombre de estereográfica fue dado por el belga F. d'Aguillon (1613). El verdadero iniciador de la utilización de la proyección conforme fue Gerhard Mercator (1512-1594) quien con Ortelius y Blaeu pertenecía a la escuela de grandes cartógrafos flamencos de los siglos XVI y XVII. En un principio la geodesia efectuaba sus cálculos sobre la esfera y elipsoide, y es a partir de los trabajos de Lagrange y Gauss cuando se empieza a desarrollar la teoría de la representación plana conforme del elipsoide con fines geodésicos; en el siglo XX ya se adopta esta forma de cálculo de modo definitivo y su teoría queda completamente desarrollada, entre otros por Schreiber, Krugger, Hatt, Driencourt, Roussilhe y Laborde.

Las coordenadas utilizadas para describir el elipsoide son la latitud ϕ y la longitud λ y para el plano las cartesianas (x,y), entonces las condiciones de conformidad establecen que:

$$\frac{E_1}{\rho^2} = \frac{G_1}{r^2} \qquad y \qquad F_1 = 0.$$

El estudio de las deformaciones y las aplicaciones con fines geodésicos han hecho que de las infinitas representaciones conformes del elipsoide sobre el plano, sólo cuatro hayan perdurado, éstas son: la proyección estereográfica polar, la cónica conforme de Lambert, la cilíndrica conforme de Mercator y la conforme de Gauss adoptada para la representación UTM. En cada caso alguna será ventajosa, así para una zona extendida a lo largo de un paralelo conviene el sistema de Mercator para latitudes ecuatoriales, el sistema Lambert para latitudes medias y la estereográfica para latitudes polares, para una zona extendida a lo largo de un huso es conveniente el sistema de Gauss.

El método más consecuente para establecer proyecciones conformes es la correspondencia de sistemas isométricos, como se desprende del teorema 4, para ello habrá que investigar primero tales sistemas en el plano y en el elipsoide. En el plano los sistemas isométricos más representativos son el cartesiano (x,y), donde $ds^2 = dx^2 + dy^2$ con $h = 1$, y el que procede de las coordenadas polares (r,γ) y que designaremos por (u,v) donde $u = \ln(r/r_0)$, $v = \gamma - \gamma_0$ con $h = r^2$, r_0 y γ_0 son constantes de integración. En el elipsoide el sistema isométrico más conveniente es el que procede de (Φ,λ) y que designaremos por $(\pounds,\lambda)$ donde $\pounds = \int_0^{\Phi} \frac{\rho}{r}\, d\Phi$ recibe el nombre de latitud creciente o variable Mercator, ya estudiada en otra parte. Con $(\pounds,\lambda)$ resulta $h = r^2$ donde r es el radio del paralelo. El establecimiento de una correspondencia funcional entre sendos sistemas isométricos nos dará las representaciones conformes buscadas.

En toda representación conforme juegan un papel fundamental las llamadas **líneas isométricas** a lo largo de las cuales la escala local k es constante; sus trayectorias ortogonales son las **líneas isomorfas**. Además se demuestra que: por cada punto de la proyección pasa una línea isométrica y sólo una; la escala local no puede ser nula pero que puede ser infinito y por último que en toda representación conforme biunívoca existe un punto o una línea isométrica donde la escala local queda mínima e igual a la unidad, le llamaremos isométrica **estacionaria** o de base.

La correspondencia funcional entre los sistemas isométricos (u,v) y (x,y) se efectúa, en virtud del teorema 5, sin más que escribir

$$X = x + iy = f(w) = f(u + iv) = x(u,v) + iy(u,v) ,$$

debiendo verificarse las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} , \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = - \frac{\partial y}{\partial u} .$$

En la práctica, como f será derivable, se efectúa el desarrollo de Taylor y resulta:

$$x = f(u) + \frac{v^2}{2!} f^{II}(u) + \frac{v^4}{4!} f^{IV}(u) + \ldots$$

$$y = vf^{I}(u) - \frac{v^3}{3!} f^{III}(u) + \frac{v^5}{5!} f^{V}(u) + \ldots$$

desarrollos que son válidos en los dominios ordinariamente utilizados.

A veces el problema se plantea imponiendo condiciones a los elementos transformados, lo que nos lleva a resolver el problema de Dirichlet con una adecuada elección de los sistemas isométricos.

La segunda cuestión en importancia en el estudio de la representación plana conforme del elipsoide ya se dijo que es el estudio de las curvaturas de las transformadas planas, esto se hace por medio de las siguientes fórmulas: fórmula de Schols-Laborde

$$\Gamma = \frac{1}{k} \frac{dk}{dn_1} ,$$

que expresa la curvatura de la imagen de una geodésica en función de la derivada del coeficiente de escala local según la normal a la curva, en particular nos indica que la imagen de una geodésica perpendicular a la isométrica admite una curvatura nula; fórmula general

$$\Gamma = \Gamma_G + \frac{1}{k} \Gamma_g ,$$

que expresa que la curvatura Γ de la transformada de una curva cualquiera C es la suma de la curvatura de la geodésica que le es tangente en el punto considerado (Γ_G) y de la curvatura geodésica (Γ_g) de la curva C dividida por la escala local.

Estas fórmulas nos permiten establecer un conjunto de propiedades de las líneas isométricas y en especial de la isométrica estacionaria.

Si consideramos la curvatura de Gauss K de la superficie, podemos demostrar que está relacionada con la escala local k y con la curvatura Γ_i de la isométrica mediante la ecuación diferencial:

$$k \frac{d^2k}{dt_1^2} - \left(\frac{dk}{dt_1}\right)^2 + k \frac{dk}{dt_1} \Gamma_i - K = 0 \, ,$$

siendo t_1 la abcisa curvilínea contada en el plano a lo largo de la isomorfa. En función de la abcisa curvilínea t sobre el elipsoide resulta:

$$k \frac{d^2k}{dt^2} - 2 \left(\frac{dk}{dt}\right)^2 + k^2 \frac{dk}{dt} \Gamma_i - k^2 K = 0.$$

Estas ecuaciones diferenciales permiten enunciar la siguiente propiedad fundamental en una proyección conforme cualquiera: la abcisa t_1 de la imagen de un punto, contada sobre la isomorfa viene dada en primera aproximación por

$$t_1 = t + \frac{K}{6} t^3 \, ,$$

donde $K = 1/N\rho$ es la curvatura total de la superficie de revolución considerada y esto es válido siempre que Γ_i quede finita. Igualmente la deformación lineal viene dada por

$$k - 1 = K \frac{t^2}{2} \, ,$$

lo que nos indica que ésta crece rápidamente según nos alejamos de la isométrica de base, razón por la cual debe restringirse el campo de aplicación de una proyección; así por ejemplo, en el caso particular del elipsoide terrestre, si se desean deformaciones inferiores a 1/1000 habrá que limitarse a una región de unos 300 kilómetros a uno y otro lado de la isométrica de base. Si la isométrica de base se reduce a un punto (proyección estereográfica), la fórmula anterior se transforma en

$$k - 1 = K \frac{t^2}{4}$$

Entiéndase bien que, para usos geodésicos, tomando la escala local en su verdadera magnitud, estas restricciones pueden evitarse siempre que las deformaciones puedan calcularse perfectamente.

Con todo lo visto puede pasarse al cálculo de las deformaciones, así la reducción angular a la cuerda queda expresada en ambos extremos por

$$dV_A = \frac{1}{S_1} \int_{A_1}^{B_1} \Gamma (S_1 - s_1) ds_1 \quad y \quad dV_B = \frac{1}{S_1} \int_{A_1}^{B_1} \Gamma s_1 \ ds_1,$$

siendo S_1 la longitud del arco A_1B_1 de curva transformada. Numéricamente estas integrales se calculan por la fórmula de tres niveles y resulta

$$dV_A = \frac{1}{6} [\Gamma_A + 2 \Gamma_m] S_1 \quad y \quad dV_B = \frac{1}{6} [2 \Gamma_m + \Gamma_B] S_1.$$

La alteración de longitudes viene dada, por el mismo procedimiento, por

$$S_1 = \frac{1}{6}[k_A + 4k_m + k_B] S \quad y \quad S = \frac{1}{6}[\frac{1}{k_A} + \frac{4}{k_m} + \frac{1}{k_B}] S_1;$$

y la reducción del arco a la cuerda por

$$\Delta = S_1 - D_1 = \frac{1}{24} S_1^3 \Gamma^2$$

La reducción de las deformaciones con fines prácticos se realiza por el conocido artificio de Tissot, dando lugar a los sistemas secantes que deberán estudiarse en cada caso particular. Si es ϵ el valor absoluto de la máxima deformación y k el valor de la escala local correspondiente, $k = 1 + \epsilon$, el artificio de Tissot consiste en reducir ϵ a la mitad sin más que multiplicar k por un factor $k_0 = (k+1)/2k$, este factor se denomina factor de reducción de escala.

Estamos ya en condiciones de pasar al estudio de las principales proyecciones conformes del elipsoide sobre el plano, lo que haremos brevemente.

La proyección de Mercator se obtiene estableciendo, entre los sistemas isométricos $(\mathcal{L} + i\lambda)$ del elipsoide y $(y + ix)$ del plano, la correspondencia: $y + ix = m(\mathcal{L} + i\lambda)$, donde m es una constante que suele tomarse igual a la unidad, entonces las ecuaciones de la proyección son:

$$y = \mathcal{L} = \log \left[\operatorname{tag}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)\left(\frac{1-e\operatorname{sen}\Phi}{1+e\operatorname{sen}\Phi}\right)^{e/2} \right],$$

$$x = \lambda.$$

Geométricamente representan una proyección conforme del elipsoide sobre la superficie de un cilindro que le es tangente a lo largo del ecuador cuya representación es el eje x, siendo el eje y la de un meridiano origen.

La escala local viene dada por $k = a/N\cos\Phi$, por consiguiente la red de isométricas está formada por los paralelos y la de isomorfas por los meridianos. El ecuador es la isométrica estacionaria.

La curvatura de las imágenes de geodésicas se obtiene por

$$\Gamma = \frac{\operatorname{sen}\Phi \operatorname{sen} Z}{a}$$

donde Z es el acimut de la geodésica en el punto considerado.

Esta proyección puede estudiarse bajo dos aspectos, para cartografía a gran escala en una zona centrada en el ecuador con una extensión de 2 ó 3 grados en latitud a cada lado, y para empleo en navegación donde resuelve todos los problemas si se exceptúan las regiones polares.

El coeficiente de reducción de escala que suele aplicarse vale $k_o = 0.9993$, por el que se multiplicarán las fórmulas antes de su empleo.

La proyección de Lambert se obtiene estableciendo, entre los sistemas isométricos $(\mathcal{L} + i\lambda)$ del elipsoide y $(\log \frac{R}{R_o} + i\gamma)$ del plano la correspondencia:

$$R = R_o\, e^{A(\mathcal{L} - \mathcal{L}_o)},$$

$$\gamma = A(\lambda - \lambda_o),$$

donde A es una constante por determinar, lo que se hace por elección del paralelo automecoico que también determina R_0. En definitiva las ecuaciones de la proyección son:

$$R = R_0\ e^{-\mathrm{sen}\ \Phi_0(\pounds - \pounds_0)}$$

$$\gamma = \pm\ \mathrm{sen}\ \Phi_0(\lambda - \lambda_0)$$

$$R_0 = N_0 \mathrm{cotg}\ \Phi_0$$

Geométricamente representa una proyección conforme del elipsoide sobre la superficie de un cono de revolución que le es tangente a lo largo del paralelo de latitud Φ_0.

La escala local viene dada por la relación $k = \frac{R}{r}$ sen Φ_0, por consiguiente las isométricas son los arcos de círculo de radio R y las isomorfas las imágenes rectilíneas de los meridianos. La ecuación diferencial de la escala local permite escribir su expresión en función de la abcisa curvilínea, arco de meridiano β , cuya imagen es la isomorfa; integrando dicha ecuación se obtiene el llamado desarrollo de la meridiana que a veces se emplea en la proyección de Lambert limitada.

La curvatura de las imágenes de geodésicas se obtiene por

$$\Gamma = \frac{\mathrm{sen}\ \Phi - \mathrm{sen}\ \Phi_0}{R\ \mathrm{sen}\ \Phi_0}\ \mathrm{sen}\ Z\ ,$$

donde Z es el acimut de la geodésica en el punto considerado.

Antes de pasar a la puesta en práctica de la proyección Lambert conviene estudiar el paso de un sistema Lambert a otro, problema que suele plantearse con frecuencia cuando la zona por representar sobrepasa los 600 Km. de anchura. El uso de funciones de variable compleja facilita la resolución.

Las fórmulas prácticas de aplicación de la proyección Lambert no son universales, pues van a depender de las condiciones que el organismo utilizador imponga. Así por ejemplo en Francia se utilizan las fórmulas de la proyección directamente, se emplea el elipsoide de Clarke (1880) y se divide el territorio en cuatro zonas. En los países anglosajones se fijan a priori las latitudes de dos paralelos automecoicos, y se emplea como variable la colatitud isométrica. Este método se ha utilizado en la construcción de la WAC (World Aeronautical Chart) destinada a reemplazar la proyección de la CIM (Carta Internacional del Mundo) 1/1.000.000. Las WAC están hechas por zonas de 4° con paralelos automecoicos a 0° 40' de los paralelos del borde de la zona. El valor de k varía entre 0.999730 y 1.000676. Se utiliza el elipsoide internacional. Otro sistema Lambert importante es la proyección Lambert de la U.S. Air Force.

En España existe la proyección cónica conforme de Lambert modificada que constituye la proyección Militar Reglamentaria. Sus fórmulas siguen en algunos aspectos la tendencia anglosajona, pero en otros no. Está extendida entre los paralelos 36° y 44° y los meridianos 8° 10' y -5° 40' y construida sobre el elipsoide de Struve. El factor de reducción es $k_0 = 0.9988085293$ que da lugar a la proyección modificada con paralelos automecoicos en 37° 10' 42".857 y 42° 46' 56".667.

Otro tipo de proyecciones conformes son las estereográficas. La estereográfica de la esfera, cuyas ecuaciones cartesianas de la proyección han sido estudiadas dentro de las proyecciones perspectivas, se obtiene por la correspondencia de los sistemas isométricos ($\mathcal{L} + i\lambda$) de la esfera y ($\log \frac{R}{R_0} + i\gamma$) del plano, sus ecuaciones son pues:

$$R = R_0 \operatorname{tag}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)$$

$$\gamma = \lambda - \lambda_0$$

Las líneas isométricas son las imágenes de los paralelos, la isométrica estacionaria se reduce a un punto y las isomorfas son las imágenes de los meridianos que son rectas concurrentes.

Más importante, desde el punto de vista cartográfico, es la proyección estereográfica del elipsoide. Esta puede construirse a partir de las fórmulas de la proyección Lambert haciendo $\Phi_0 = \Pi/2$, lo que da $n = 1$, $R_0 = 0$, el paralelo automecoico se reduce a un punto, uno de los polos, y la superficie cónica a un plano tangente en dicho punto. Se obtiene una proyección estereográfica polar conforme que no es una perspectiva y que se utiliza en la representación de los casquetes polares completando en esas regiones la extensión de los sistemas cónicos y cilíndricos de Lambert y Mercator.

De entre todos los sistemas conformes, el de Gauss, del que vamos a ocuparnos a continuación, es el único que tiene un carácter general y que puede extenderse a todo el globo; todos los husos que se consideran son idénticos y las fórmulas de uno de ellos válidas para los restantes siempre que se considere el mismo elipsoide.

En principio este sistema es una representación cilíndrica transversa sobre un cilindro tangente al elipsoide a lo largo de un meridiano y conforme. El meridiano de tangencia se transforma en una recta sobre el plano, conservándose sobre ella las magnitudes lineales en su verdadera dimensión. Se conoce generalmente con el nombre de proyección de Mercator transversa o proyección UTM. Para la obtención de sus fórmulas se establece una correspondencia funcional entre dos sistemas isométricos del elipsoide y plano que satisfaga las siguientes condiciones: a) que la representación sea conforme, b) que la transformada sobre el plano del meridiano central del huso sea una recta isométrica de base y se tome como eje y, y c) que el origen del sistema sea la intersección del meridiano central con el ecuador.

El tratamiento matemático de esta proyección presenta dos facetas, una es el estudio teórico de la transformación y otra el establecimiento de sus fórmulas prácticas. Un método muy utilizado consiste en estudiar primero el caso esférico, donde la transformación $y + ix = f(\pounds + i\lambda)$ entre sistemas isométricos que cumpla las condiciones anteriores es:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \lambda \cos \Phi}{1 - \operatorname{sen} \lambda \cos \Phi}, \qquad \operatorname{tag} \frac{y}{a} = \frac{\operatorname{tag} \Phi}{\cos \lambda},$$

siendo a el radio de la esfera considerada. En este caso las isométricas e isomorfas se deducen de las de la proyección de Mercator directa por una rotación de 90°.

Seguidamente se efectúa una generalización al elipsoide utilizando la latitud isométrica L cuyo comportamiento sobre el elipsoide respecto de la latitud creciente $\mathcal{L}$ es el mismo que el de la latitud geográfica Φ sobre la esfera. De esta forma lo que se obtiene no es la representación conforme buscada, sino una doble proyección "doppelprojektion" del elipsoide sobre el plano, de expresiones:

$$\operatorname{th}\frac{x}{a} = \operatorname{sen}\lambda \cos L , \qquad \operatorname{tag}\frac{y}{a} = \frac{\operatorname{tag} L}{\cos\lambda} ,$$

obtenida en dos etapas: 1) Haciendo corresponder latitudes crecientes, se hace una representación conforme del elipsoide sobre la esfera, esta representación conserva las longitudes pero modifica las latitudes y al paralelo de latitud Φ del elipsoide le corresponde el de latitud L de la esfera. 2) Se efectúa una representación conforme de esta esfera imagen sobre el plano.

Ahora bien, el resultado de esta doble proyección no es la proyección que interesa pues no verifica la condición b) anterior ya que el desarrollo del meridiano que se obtiene es $\beta = \int_0^L a\,dL$, mientras que el que se desea es $\beta = \int_0^\Phi \rho\,d\Phi$, de manera que para que la ordenada represente la verdadera magnitud del arco de meridiano basta expresar la integral del arco en función de la latitud isométrica

$$y = f(aL) = \int_0^\Phi \rho d\Phi ,$$

el resultado nos dará la función f buscada y por tanto la proyección de Gauss-Krügger.

Para facilitar el trabajo son muy convenientes los desarrollos de Oscar Adams que dan β en función de Φ y Φ en función de L.

Las isométricas de la proyección de Gauss-Krügger son curvas algebraicas prácticamente sinusoidales. La escala local y las curvaturas se obtienen por los métodos habituales.

se reduce a un punto, uno de los polos, y la superficie cónica a un plano tangente en dicho punto. Se obtiene una proyección estereográfica polar conforme que no es una perspectiva y que se utiliza en la representación de los casquetes polares completando en esas regiones la extensión de los sistemas cónicos y cilíndricos de Lambert y Mercator.

De entre todos los sistemas conformes, el de Gauss, del que vamos a ocuparnos a continuación, es el único que tiene un carácter general y que puede extenderse a todo el globo; todos los husos que se consideran son idénticos y las fórmulas de uno de ellos válidas para los restantes siempre que se considere el mismo elipsoide.

En principio este sistema es una representación cilíndrica transversa sobre un cilindro tangente al elipsoide a lo largo de un meridiano y conforme. El meridiano de tangencia se transforma en una recta sobre el plano, conservándose sobre ella las magnitudes lineales en su verdadera dimensión. Se conoce generalmente con el nombre de proyección de Mercator transversa o proyección UTM. Para la obtención de sus fórmulas se establece una correspondencia funcional entre dos sistemas isométricos del elipsoide y plano que satisfaga las siguientes condiciones: a) que la representación sea conforme, b) que la transformada sobre el plano del meridiano central del huso sea una recta isométrica de base y se tome como eje y, y c) que el origen del sistema sea la intersección del meridiano central con el ecuador.

El tratamiento matemático de esta proyección presenta dos facetas, una es el estudio teórico de la transformación y otra el establecimiento de sus fórmulas prácticas. Un método muy utilizado consiste en estudiar primero el caso esférico, donde la transformación $y + ix = f(£ + i\lambda)$ entre sistemas isométricos que cumpla las condiciones anteriores es:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \lambda \cos \Phi}{1 - \operatorname{sen} \lambda \cos \Phi} , \qquad \operatorname{tag} \frac{y}{a} = \frac{\operatorname{tag} \Phi}{\cos \lambda} ,$$

siendo a el radio de la esfera considerada. En este caso las isométricas e isomorfas se deducen de las de la proyección de Mercator directa por una rotación de 90°.

Seguidamente se efectúa una generalización al elipsoide utilizando la latitud isométrica L cuyo comportamiento sobre el elipsoide respecto de la latitud creciente $\mathcal{L}$ es el mismo que el de la latitud geográfica Φ sobre la esfera. De esta forma lo que se obtiene no es la representación conforme buscada, sino una doble proyección "doppelprojektion" del elipsoide sobre el plano, de expresiones:

$$\operatorname{th} \frac{x}{a} = \operatorname{sen} \lambda \cos L \,, \qquad \operatorname{tag} \frac{y}{a} = \frac{\operatorname{tag} L}{\cos \lambda} \,,$$

obtenida en dos etapas: 1) Haciendo corresponder latitudes crecientes, se hace una representación conforme del elipsoide sobre la esfera, esta representación conserva las longitudes pero modifica las latitudes y al paralelo de latitud Φ del elipsoide le corresponde el de latitud L de la esfera. 2) Se efectúa una representación conforme de esta esfera imagen sobre el plano.

Ahora bien, el resultado de esta doble proyección no es la proyección que interesa pues no verifica la condición b) anterior ya que el desarrollo del meridiano que se obtiene es $\beta = \int_0^L a\, dL$, mientras que el que se desea es $\beta = \int_0^\Phi \rho\, d\Phi$, de manera que para que la ordenada represente la verdadera magnitud del arco de meridiano basta expresar la integral del arco en función de la latitud isométrica

$$y = f(aL) = \int_0^\Phi \rho d\Phi \,,$$

el resultado nos dará la función f buscada y por tanto la proyección de Gauss-Krüger.

Para facilitar el trabajo son muy convenientes los desarrollos de Oscar Adams que dan β en función de Φ y Φ en función de L.

Las isométricas de la proyección de Gauss-Krüger son curvas algebraicas prácticamente sinusoidales. La escala local y las curvaturas se obtienen por los métodos habituales.

La puesta en práctica de la proyección UTM está basada en los desarrollos en serie entera de las funciones f y F que permiten las transformaciones directa e inversa de coordenadas. Tomando como origen el meridiano central del huso y un punto $O(\Phi_0, \lambda_0)$ se obtiene, con $\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0$, $\Delta\pounds = \pounds - \pounds_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$:

$$\Delta y + ix = f(\Delta\pounds + i\Delta\lambda) \quad y \quad \Delta\pounds + i\Delta\lambda = F(\Delta y + ix),$$

sólo queda imponer la condición de que para $x = 0$, $y = f(\pounds) = \beta$ donde β es el desarrollo del meridiano sobre el elipsoide a partir del ecuador. Así se obtienen los siguientes desarrollos, que sólo iniciamos:

Problema directo

$$x = \Delta\lambda N\cos\Phi + \frac{1}{6}\Delta\lambda^3 N\cos^3\Phi\,(1 - \mathrm{tag}^2\Phi + \eta^2) + \frac{1}{120}\Delta\lambda^5 N\cos^5\Phi\,(5 - 18\mathrm{tag}^2\Phi + \mathrm{tag}^4\Phi + 14\eta^2 - 58\mathrm{tag}^2\Phi\,\eta^2) + \ldots$$

$$y = \beta + \frac{\Delta\lambda^2}{2} N\cos^2\Phi + \frac{\Delta\lambda^4}{24} N\cos^4\Phi\,\mathrm{tag}\Phi\,(5 - \mathrm{tag}^2\Phi + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \ldots$$

habiendo puesto $\eta^2 = 1 + e^2\cos^2\Phi$

Las coordenadas UTM son:

$$X = x + 500.000, \qquad Y = y$$

Problema inverso

$$\Phi = \Phi' - \frac{x^2}{2N'^2}\mathrm{tag}\Phi'\,(1 + \eta'^2) + \frac{x^4}{24N'^4}\mathrm{tag}\Phi'\,(5 + 3\mathrm{tag}^2\Phi' + 6\eta'^2 - 6\mathrm{tag}^2\Phi'\,\eta'^2 - 3\eta'^4 - 9\mathrm{tag}^2\Phi'\,\eta'^4) + \ldots$$

$$\lambda = \frac{x}{N'\cos\Phi'} - \frac{x^3}{6N'^3\cos\Phi'}(1 + 2\mathrm{tag}^2\Phi' + \eta'^2) + \ldots$$

donde ϕ' es la latitud correspondiente a un punto sobre el meridiano central de la misma ordenada Y que el punto considerado.

Convergencia de meridianos

Definida la convergencia de meridianos por $\tan \gamma = \frac{dy}{dx}$, los desarrollos anteriores dan respectivamente:

$$\gamma = \Delta\lambda \operatorname{sen}\phi + \frac{1}{3}\Delta\lambda^3 \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi\,(1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \ldots$$

$$\gamma = \frac{x}{N'} \operatorname{tag}\phi' - \frac{x^3}{3N'^3} \operatorname{tag}\phi'\,(1 + \operatorname{tag}^2\phi' - \eta'^2 - 2\eta'^4) + \ldots$$

Escala local

Siendo $k^2 = ds_1^2/ds^2$ y k_0 el factor de reducción, resulta

$$k = k_0\,[1 + \frac{1}{2}\Delta\lambda^2\cos^2\phi\,(1 + \eta^2)]$$

$$k = k_0\,[1 + \frac{x^2}{2N^2}\,(1 + \eta'^2)]$$

Reducción a la cuerda

$$dV_A = \frac{y_B - y_A}{6N^2}\,(1 + \eta^2)(2x_A + x_B)$$

$$dV_B = \frac{y_A - y_B}{6N^2}\,(1 + \eta^2)(2x_B + x_A)$$

El Army Map Service de los Estados Unidos ha preparado unas tablas de la proyección UTM utilizando husos de 6° de amplitud que comienzan a contar en el meridiano 180°, y un factor de reducción $k_0 = 0.99960$. Con estas tablas, designadas por I, II, III, ..., XX, los problemas de cálculo se reducen a efectuar interpolaciones seguidas de simples productos y sumas.

Uno de los problemas que plantea el sistema UTM es el de la duplicidad de coordenadas planas que pueden corresponder a unas mismas coordenadas geodésicas, cuando se consideran dos husos contiguos. Este problema de cambio de huso puede resolverse a través de las coordenadas geodésicas, pero es preferible establecer unas fórmulas de correspondencia funcional entre los sistemas de coordenadas UTM de los husos contiguos y, como hace el Army Map Service, tabular las funciones que resulten. El cambio de huso ha de tenerse en cuenta también en el cálculo de distancias elipsódicas a partir de coordenadas UTM en husos distintos, así como en el cálculo de orientaciones en el mismo caso; esto completa las aplicaciones de la proyección UTM.

Para un completo manejo de la cartografía UTM, prácticamente la única existente en la actualidad, pues ha sido adoptada por la mayoría de los países, debe conocerse perfectamente la descripción de la cuadrícula UTM con sus sistemas de referencia, deben saberse interpretar los correspondientes gráficos de declinación y convergencia de meridianos y debe conocerse también la cuadrícula UPS de la proyección estereográfica polar que complementa a la UTM para regiones con latitudes superiores a los 80°. Todo esto se facilita enormemente con los manuales técnicos preparados por el AMS ya citado y que han sido difundidos por los diferentes países, entre los que se encuentra España.

La proyección plana conforme del elipsoide tiene dos grandes aplicaciones fundamentales, la primera es su empleo en navegación y la segunda el cálculo y compensación de redes geodésicas de pequeña extensión. La puesta a punto y ejecución de estas aplicaciones constituyen unos buenos ejercicios.

Finalicemos nuestro estudio indicando otras posibilidades que ofrece la representación conforme. Se trata de la representación conforme del elipsoide sobre la esfera, cuya teoría, con ligeras modificaciones, puede establecerse a partir de la de la representación plana ya estudiada, por lo que no insistiremos sobre ello. Sin embargo, sí hemos de destacar que las principales aplicaciones de este tipo de proyecciones no tienen un carácter cartográfico, sino geodésico y en especial en lo referente al cálculo de grandes geodésicas, permitiendo la sustitución de la geometría y trigonometría del elipsoide por la esférica, lo que facilita enormemente la resolución de los problemas geodésicos planteados.

Los conceptos expuestos corresponden a lo que hemos llamado cartografía matemática. Estos conceptos pueden complementarse con la lectura de algunos manuales sobre técnicas cartográficas, técnicas de reproducción y cartografía automática, para lo que no se requieren conocimientos matemáticos previos distintos de los aquí expuestos. La utilización de las cartas o mapas que resultan de la aplicación de tales técnicas constituirá el aspecto práctico de la cartografía que, como dijimos al principio, interesa no sólo a la geodesia o astronomía sino también a una gran cantidad de disciplinas que creemos innecesario enumerar.

BIBLIOGRAFIA

BIEBERBACH, L. (1966): *Introducción a la teoría de la representación conforme*. Labor, S.A. Madrid.

BOAGA, G. (1948): *Tratatto di Geodesia e Topografía*. CEDAN. Padova.

BOMFORD, G. (1980): *Geodesy*. Oxford Univ. Press.

CAILLEMER, A., et LE COCQ, C. (1983): *Astronomie de Position, Géodésie*. Societé des Editions Techniq. Paris.

CEBRIAN y LOS ARCOS (1895): *Proyecciones Geográficas*. I.G.C. Madrid.

CUENIN, R. (1972): *Cartographie Générale*. Eyrolles. Paris.

DRIENCOURT, J. et LABORDE, J. (1932): *Traité des Projections des cartes géographiques*. Hermann. Paris.

HOTINE, M. (1969): *Mathematical Geodesy* . U.S. Dep. of Commerce. Washington.

JACKSON, J.E. (1980): *Sphere, Spheroid and projections for surveyors*. Granada P. London.

LAUF, G.B. (1983): *Geodesy and map projections*. TAFE Pub. Unit Hawthorn.

LEE, L.P. (1976): *Conformal projections based on elliptic functions*. B.V. Gutsell, York Univ. Toronto.

LEVALLOIS, J.J. (1970): *Géodésie Générale*. Eyrolles. Paris.

MALING, D.H. (1980): *Coordinate Systems and Map Projections*. George Philip and Son Ltd. London.

MASLOV, A.V., GORDEEV, A.V. and BATRAKOV, Yu. G. (1984): *Geodetic Surveying*. MIR Publishers. Moscow.

MIFSUT y MACON, A. (1905): *Geodesia y Cartografía*. Depósito de Guerra. Madrid.

MUELLER, I.I. and RAMSAYER, K.H. (1979): *Introduction to surveying*. Frederick Ungar Pub. Co. New York

NEHARI, Z. (1952): *Conformal Mapping*. Mc Graw-Hill. London.

RAISZ, E. (1972): *Cartografía*. Omega. Barcelona.

RICHARDUS, P. (1966): *Project Surveying*. North Holland. Amsterdam.

RICHARDUS, P. and ADLER, R.K. (1972): *Map projections for geodesists, cartographers and geographers*. North Holland. Amsterdam.

ROBINSON-SALE-MORRISON-MUEHRCKE (1984): *Elements of Cartography*. John Wiley and Sons. New York.

SERVICIO GEOGRAFICO DEL EJERCITO (1971): *Apuntes de Cartografía*. Escuela de Topografía y Geodesia. Madrid.

SERVICIO GEOGRAFICO DEL EJERCITO (1976): *Proyección U T M*. Talleres del S.G.E. Madrid.

TARDI, P. et LACLAVERE, G. (1954): *Traité de Géodésie*. Gauthier Villars. Paris.

ZAKATOV, R.S. (1981): *Curso de Geodesia Superior*. MIR. Moscú.

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE — MADRID

(Antes Seminario de Astronomía y Geodesia)

1.—Efemérides de 63 Asteroides para la oposición de 1950 (1949).
2.—E. Pajares: Sobre el cálculo gráfico de valores medios (1949).
3.—J. Pensado: Orbita del sistema visual σ^2 U Maj (1950).
4.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1951 (1950).
5.—J. M. Torroja: Corrección de la órbita del Asteroide 1395 "Aribeda" (1950).
6.—R. Carrasco y J. M. Torroja: Rectificación de la órbita del Asteroide 1371 "Resi" (1971).
7.—J. M. Torroja y R. Carrasco: Rectificación de la órbita del Asteroide 1560 (1942 XB) y efemérides para la oposición de 1951 (1951).
8.—M. L. Siegrist: Orbita provisional del sistema visual Σ 728-32 Orionis (1951).
9.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1952 (1951).
10.—J. Pensado: Orbita provisional de Σ 1883 (1951).
11.—M. L. Siegrist: Orbita provisional del sistema visual Σ 2052 (1952).
12.—Efemérides de 88 Asteroides para la oposición de 1953 (1952).
13.—J. Pensado: Orbita de ADS 9380 = Σ 1879 (1952).
14.—F. Alcázar: Aplicaciones del Radar a la Geodesia (1952).
15.—J. Pensado: Orbita de ADS 11897 = Σ 2438 (1952).
16.—B. Rodríguez-Salinas: Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las marcas y predicción de las mismas en un cierto lugar (1952).
17.—R. Carrasco y M. Pascual: Rectificación de la órbita del Asteroide 1528 "Conrada" (1953).
18.—J. M. González-Aboin: Orbita de ADS 1709 = Σ 228 (1953).
19.—J. Baltá: Recientes progresos en Radioastronomía. Radiación solar hiperfrecuente (1953).
20.—J. M. Torroja y A. Vélez: Corrección de la órbita del Asteroide 1452 (1938 DZ_1) (1953).
21.—J. M. Torroja: Cálculo con Cracovianos (1953).
22.—S. Arend: Los polinomios ortogonales y su aplicación en la representación matemática de fenómenos experimentales (1953).
23.—J. M. Torroja y V. Bongera: Determinación de los instantes de los contactos en el eclipse total de Sol de 25 de febrero de 1952 en Cogo (Guinea Española) (1954).
24.—J. Pensado: Orbita de la estrella doble Σ 2 (1954).
25.—J. M. Torroja: Nueva órbita del Asteroide 1420 "Radcliffe" (1954).
26.—J. M. Torroja: Nueva órbita del Asteroide 1557 (1942 AD) (1954).
27.—R. Carrasco y M. L. Siegrist: Rectificación de la órbita del Asteroide 1290 "Albertine" (1954).
28.—J. Pensado: Distribución de los períodos y excentricidades y relación período-excentricidad en las binarias visuales (1955).
29.—J. M. González-Aboin: Nueva órbita del Asteroide 1372 "Haremari" (1955).
30.—M. de Pascual: Rectificación de la órbita del Asteroide 1547 (1929 CZ) (1955).
31.—J. M. Torroja: Orbita del Asteroide 1554 "Yugoslavia" (1955).
32.—J. Pensado: Nueva órbita del Asteroide 1401 "Lavonne" (1956).
33.—J. M. Torroja: Nuevos métodos astronómicos en el estudio de la figura de la Tierra (1956).
34.—D. Calvo: Rectificación de la órbita del Asteroide 1466 "Mündleira" (1956).
35.—M. L. Siegrist: Rectificación de la órbita del Asteroide 1238 "Predappia" (1956).

36.—J. PENSADO: Distribución de las inclinaciones y de los polos de las órbitas de las estrellas dobles visuales (1956).

37.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Resultados de la observación del eclipse total de Sol de 30 de junio de 1954 en Sydkoster (Suecia) (1957).

38.—ST. WIERZBINSKI: Solution des équations normales par l'algorithme des cracoviens (1958).

39.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Rectificación de la órbita del Asteroide 1192 "Prisma" (1958).

40.—M. LÓPEZ ARROYO: Sobre la distribución en longitud heliográfica de las manchas solares (1958).

41.—F. MÚGICA: Sobre la ecuación de Laplace (1958).

42.—F. MARTÍN ASÍN: Un estudio estadístico sobre las coordenadas de los vértices de la triangulación de primer orden española (1958).

43.—ST. WIERZBINSKI: Orbite améliorée de h 4530 = γ Cen = Cpd —48°, 4965 (1958).

44.—D. CALVO BARRENA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1164 "Kobolda" (1958).

45.—M. LÓPEZ ARROYO: El ciclo largo de la actividad solar (1959).

46.—F. MÚGICA: Un nuevo método para la determinación de la latitud (1959).

47.—J. M. TORROJA: La observación del eclipse de 2 de octubre de 1959 desde El Aaiun (Sahara) (1960).

48.—J. M. TORROJA, P. JIMÉNEZ-LANDI y M. SOLÍS: Estudio de la polarización de la luz de la corona solar durante el eclipse total de Sol del día 2 de octubre de 1959 (1960).

49.—E. PAJARES: Sobre el mecanismo diferencial de un celóstato (1960).

50.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Sobre la diferencia entre los radios vectores del elipsoide internacional y el esferoide de nivel (1960).

51.—J. M. TORROJA: Resultado de las observaciones del paso de Mercurio por delante del disco solar del 7 de noviembre de 1960 efectuadas en los observatorios españoles (1961).

52.—F. MÚGICA: Determinación de la latitud por el método de los verticales simétricos (1961).

53.—M. LÓPEZ ARROYO: La evolución del área de las manchas solares (1962).

54.—F. MÚGICA: Determinación simultánea e independiente de la latitud y longitud mediante verticales simétricos (1962).

55.—P. DÍEZ-PICAZO: Elementos de la órbita de la variable eclipsante V 499 Scorpionis (1964).

56.—J. M. TORROJA: Los Observatorios Astronómicos en la era espacial (1965).

57.—F. MARTÍN ASÍN: Nueva aportación al estudio de la red geodésica de primer orden española y su comparación con la red compensada del sistema europeo (1966).

58.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ: La Luz Zodiacal. Luz del espacio interplanetario (1966).

59.—J. M. GONZÁLEZ-ABOÍN: Variaciones de las coordenadas geodésicas de los vértices de una red, por cambio de elipsoide de referencia (1966).

60.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ y R. DUMONT: Fotometría absoluta de la raya verde y del continuo atmosférico en el Observatorio Astronómico del Teide (Tenerife), de enero de 1964 a julio de 1965 (1967).

61.—M. REGO: Estudio del espectro de la estrella 31 Aql. en la región $\lambda\lambda$ 4000-6600 Å (1969).

62.—C. MACHÍN: Mareas terrestres (1969).

63.—J. M. TORROJA: La estación para la observación de satélites geodésicos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid (1969).

64.—M. J. SEVILLA: Reducción automática de posiciones de estrellas (1970).

65.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid en 1969 (1970).

66.—M. J. SEVILLA: Los cálculos de estación en triangulación espacial (1970).

67.—MANUEL E. REGO: Determinación de las abundancias de los elementos en la atmósfera de la estrella de alta velocidad 31 Aql. (1970).

68.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Análisis cualitativo del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1971).

69.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1970 (1971).

70.—R. VIEIRA y R. ORTIZ: Descripción de un aparato para medida de coordenadas (1971).

71.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1971 (1972).

72.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Observación y estudio teórico del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1972).

73.—M. J. SEVILLA: Cálculo de las constantes de distorsión y parámetros del disco obturador para cámaras balísticas (1973).

74.—R. PARRA y M. J. SEVILLA: Cálculo de efemérides y previsiones de pasos de satélites geodésicos (1973).

75.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Resultado de las observaciones de α Peg efectuadas desde el satélite europeo TDI (1973).

76.—E. SIMONNEAU: Problemas en la determinación de abundancias de elementos en las estrellas en condiciones de equilibrio termodinámico local y alejadas del equilibrio termodinámico local (1974).

77.—J. ARANDA: Construcción de modelos de estructura interna para estrellas en la secuencia principal inicial (1974).

78.—R. ORTIZ, M. J. SEVILLA y R. VIEIRA: Estudio de la calibración, técnica de medida y automatización de datos en un comparador para medidas de placas estelares (1974).

79.—M. J. SEVILLA: Método autocorrector para el cálculo de direcciones de satélites geodésicos y análisis de los errores en la restitución de un arco de órbita (1974).

80.—M. A. ACOSTA, R. ORTIZ y R. VIEIRA: Diseño y construcción de un fotómetro fotoeléctrico para la observación de ocultaciones de estrellas por la Luna (1974).

81.—T. J. VIVES, C. MORALES, J. GARCÍA-PELAYO y J. BARBERO: Fotometría fotográfica UBV del cúmulo galáctico King 19 (1974).

82.—R. ORTIZ y R. VIEIRA: Control automático en posición y tiempo de los sistemas de obturación de las cámaras de observación de satélites geodésicos (1974).

83.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1972 y 1973 (1974).

84.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA y M. REGO: α CrB en el ultravioleta lejano (1975).

85.—J. M. TORROJA, R. VIEIRA, R. ORTIZ y M. J. SEVILLA: Estudio de mareas terrestres en España (1975).

86.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Levantamiento gravimétrico de Lanzarote (1975).

87.—P. KUNDANMAL SUKHWANI: Modelos teóricos de curvas de luz. Su aplicación al sistema β Lyrae (1975).

88.—M. J. SEVILLA: Coordenadas astronómicas y geodésicas. Desviación relativa de la vertical (1975).

89.—C. TEJEDOR: Fotometría fotoeléctrica R. G. U. del cúmulo galáctico IC 2581 (1976).

90.—M. J. SEVILLA: Nuevos coeficientes para la reducción automática de posiciones de estrellas (1976).

91.—M. REGO: Técnicas observacionales en espectroscopía astrofísica (1976).

92.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud por distancias cenitales de la polar, método de Littrow (1976).

93.—T. J. VIVES: Determinación fotométrica del tipo espectral de la componente desconocida de una estrella binaria eclipsante (1976).

94.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Contraste y determinación por métodos astrofísicos de fuerzas de oscilador (1977).

95.—M. J. SEVILLA y R. CHUECA: Determinación de acimutes por observación de la Polar. Método micrométrico (1977).

96.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Fotometría R G U en un campo del anticentro galáctico, cerca del NGC 581 (1977).

97.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Datos fotométricos de 2.445 estrellas estudiadas en la región de Casiopea, entre los cúmulos abiertos Trumpler 1 y NGC 581 (1977).

98.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Spectral Analysis of Earth Tides (1977).

99.—JOSÉ M. TORROJA y RICARDO VIEIRA: Earth Tides in Spain. Preliminary results (1977).

(Continúa en la cuarta de cubierta)

100.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Three different methods for taking in account the gaps in spectral analysis of Earth Tides records (1978).

101.—R. VIEIRA: Mareas terrestres (1978).

102.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la longitud por el método de Mayer. Programas de cálculo automático (1979).

103.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la latitud por el método de Sterneck. Programas de cálculo automático (1979).

104.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por el método de alturas iguales. Programas de cálculo automático (1979).

105.—P. K. SUKHWANI y A. GIMÉNEZ: Corrección de efectos atmosféricos para imágenes tomadas desde satélites Landsat (1979).

106.—M. J. SEVILLA: Inversión de matrices simétricas en el método de mínimos cuadrados (1979).

107.—A. GIMÉNEZ: Análisis de la curva de luz del sistema binario eclipsante S Velorum (1979).

108.—M. J. SEVILLA: Determinación del acimut de una referencia por observación de la estrella polar. Programa de cálculo automático (1979).

109.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (Primera parte) (1980).

110.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Determinación de la latitud por el método de Horrebow-Talcott. Programas de Cálculo Automático (1980).

111.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1980).

112.—R. VIEIRA y M. OREJANA: Comunicaciones presentadas en las XLI y XLII Jornadas del Grupo de Trabajo de Geodinámica del Consejo de Europa. Luxemburgo (1979-80).

113.—M. J. SEVILLA: Sobre un método de cálculo para la resolución de los problemas geodésicos directo e inverso (1981).

114.—R. VIEIRA, J. M. TORROJA, C. TORO, F. LAMBAS, M. OREJANA y P. K. SUKHWANI: Comunicaciones presentadas en el IX Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Nueva York (1981).

115.—M. A. MONTULL, M. J. SEVILLA y A. GONZÁLEZ-CAMACHO: Aplicación de la V. L. B. I. al estudio del movimiento del Polo (1981).

116.—A. GONZÁLEZ-CAMACHO y M. J. SEVILLA: Algunas relaciones entre diferentes ejes que se consideran en la rotación de la Tierra (1981).

117.—R. VIEIRA, F. LAMBAS y E. GIMÉNEZ: Modificaciones realizadas en un gravímetro LaCoste Romberg mod. G para su utilización en registro continuo de la gravedad (1981).

118.—R. VIEIRA: La microrred de mareas gravimétricas del Sistema Central (1981).

119.—J. M. TORROJA y R. VIEIRA: Informe sobre el desarrollo del programa de investigación sobre mareas terrestres en el último bienio (1981).

120.—F. LAMBAS y R. VIEIRA: Descripción, estudio de la precisión y aplicaciones geodésicas y geofísicas de los nuevos niveles de lectura electrónica (1981).

121.—M. J. SEVILLA: Programación del método de la cuerda (1981).

122.—J. M. TORROJA: Historia de la Ciencia Arabe. Los Sistemas Astronómicos (1981).

123.—M. J. SEVILLA y R. VIEIRA: Comunicaciones presentadas en la Sesión Científica de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, celebrada el día 13 de enero de 1982 (1982).

124.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Aplicación del método de colocación a la reducción de placas fotográficas de estrellas (1982).

125.—M. J. SEVILLA y A. G. CAMACHO: Deformación rotacional de una tierra elástica (1982).

126.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Obtención de las medidas de la precisión en la determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1982).

127.—M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y P. ROMERO: Comunicaciones presentadas en la IV Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica. Santiago de Compostela (1983).

128.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (Segunda parte) (1983).

(*Continúa en la segunda de cubierta*)

129.—M. J. SEVILLA: Geodesia por satélites y navegación (1983).

130.—L. GARCÍA ASENSIO, A. G. CAMACHO, P. ROMERO y M. J. SEVILLA: Comunicaciones presentadas en la V Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica (1983).

131.—M. J. SEVILLA: Anomalías de la gravedad basadas en el sistema geodésico de referencia 1980 (1983).

132.—J. M. TORROJA: Historia de la Física hasta el siglo XIX. La Mecánica Celeste (1983).

133.—A. G. CAMACHO y M. J. SEVILLA: The Molodensky Problem for an homogeneous liquid core (1984).

134.—J. M. TORROJA: La obra astronómica de Alfonso X El Sabio (1984).

135.—H. MORITZ: Sistemas de referencia en Geodesia (1984).

136.—H. MORITZ: Rotación de la Tierra (1984).

137.—A. G. CAMACHO y M. J. SEVILLA: Autofrecuencias del movimiento del Polo para un modelo de Tierra de tipo Jeffreys Molodensky (1984).

138.—J. M. TORROJA: Nuevas definiciones en el problema de la medida del tiempo (1984).

139.—M. J. SEVILLA: Astronomía Geodésica (1984).

140.—M. J. SEVILLA y M. D. MARTÍN: Diseño de una Microrred en la Caldera del Teide para el estudio de deformaciones de la corteza en la zona (1986).

141.—R. VIEIRA, C. DE TORO y V. ARAÑA: Estudio Microgravimétrico en la Caldera del Teide (1986).

142.—M. J. SEVILLA, M. D. MARTÍN y A. G. CAMACHO: Análisis de Datos y Compensación de la primera campaña de observaciones en la Caldera del Teide (1986).

143.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Hamiltonian Formulation of the polar motion for an elastic earth's model (1986).

144.—P. ROMERO y M. J. SEVILLA: The Sasao-Okubo-Saito equations by Hamilton Theory. First Results (1986).

145.—R. VIEIRA, M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y M. D. MARTÍN: Geodesia de precisión aplicada al control de movimientos y deformaciones en la Caldera del Teide (1986).

146.—R. VIEIRA, J. M. TORROJA, C. DE TORO, B. DUCARME, J. KAARIAINEN, E. MEGÍAS y J. FERNÁNDEZ: Comunicaciones presentadas en el X Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Madrid, 1985 (1986).

147.—M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y P. ROMERO: Comunicaciones presentadas en el X Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Madrid, 1985 (1986).

148.—M. J. SEVILLA: Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes Geodésicas: III Curso de Geodesia Superior (1986).

149.—H. LINKWITZ: Compensación de grandes redes geodésicas: III Curso de Geodesia Superior (1986).

150.—H. HENNEBERG: Redes geodésicas de alta precisión: III Curso de Geodesia Superior (1986).

ISSN: 0213 - 6198

Depósito Legal: M. Sep. 894-1958 *Realigraf, S. A., Burgos, 12. 28039 Madrid*